TYPY HOMOTOPII W GEOMETRII ALGEBRAICZNEJ (WYKŁAD IM. WOJTKA PULIKOWSKIEGO, 6 CZERWCA 2019)

PIOTR ACHINGER

Streszczenie. Niniejsze notatki stanowią rozszerzoną wersję wygłoszonego przeze mnie XXVI Wykładu im. Wojtka Pulikowskiego na Uniwersytecie Adama Mickiewicza w Poznaniu. Omówiłem w nim jak i dlaczego badać typy homotopii rozmaitości algebraicznych, zwłaszcza nad ciałami innymi niż liczby zespolone.

Typ homotopii przestrzeni topologicznej opisuje własności jej „kształtu", zapominając geometryczne informacje nieistotne z punktu widzenia topologii algebraicznej (np. litery A i O mają ten sam typ homotopii). Istotne niezmienniki, takie jak grupa podstawowa lub grupy kohomologii, zależą wyłącznie od typu homotopii przestrzeni.

Geometria algebraiczna zajmuje się rozmaitościami algebraicznymi oraz innymi obiektami geometrycznymi zdefiniowanymi w algebraiczny sposób. Metody topologii algebraicznej okazują się być bardzo pomocne w ich badaniu, ponieważ odpowiednie niezmienniki (grupy kohomologii, grupa podstawowa) mają dużo więcej struktury niż w topologii. Jedne z najgłębszych hipotez w geometrii algebraicznej (hipotezy Hodge'a — jeden z problemów milenijnych, Tate'a i Grothendiecka) postulują, że z tych niezmienników można odczytać geometryczne i arytmetyczne informacje.

Na wykładzie zaprezentowałem kilka konstrukcji typów homotopii w geometrii algebraicznej (w szczególności typ homotopii *étale* Artina–Mazura) oraz związki pomiędzy nimi, oraz omówiłem kilka zjawisk, które odróżniają je od typów homotopii przestrzeni topologicznych.

Wersja 2019-06-08

Zgodnie z powszechnym poglądem, *geometria* i *algebra* wzajemnie się uzupełniają. Algebra jest zazwyczaj lepiej dostosowana do *ścisłych rozumowań* niż geometria (jak potwierdzi zapewne każdy kto kiedykolwiek sprawdzał zadania na Olimpiadzie Matematycznej czy podobnych zawodach)[1]. Z kolei geometria jest często bliższa ludzkiej intuicji.

Topologia algebraiczna może być widziana jako algebraizacja geometrii. Dany obiekt geometryczny — przestrzeń topologiczną — zamienia się na obiekt algebraiczny (np. grupę podstawową czy grupy homologii). Zazwyczaj nie sposób z tak otrzymanego niezmiennika odzyskać badany obiekt — typowe niezmienniki nie odróżniają od siebie homotopijnie równoważnych przestrzeni. *Typ homotopii* przestrzeni to jej klasa abstrakcji względem relacji homotopijnej równoważności.

Analogicznie, *geometria algebraiczna* to geometryzacja algebry (dokładniej, teorii pierścieni przemiennych). Jednak, w odróżnieniu od topologii algebraicznej, w geometrii algebraicznej geometria i algebra stają się tym samym. Pozwala to naprzemiennie stosować techniki z obu dziedzin.

---

[1]Następujący fragment ze wstępu do książki *Stratified Morse Theory* Goresky'ego i MacPhersona świetnie to oddaje:

(...) [T]here is often a creative tension between geometry and rigor. Rigor follows the initial conception with a much greater time delay in geometry than it does in algebra. Also, when it comes, true geometers often feel its language misses the essential geometric ideas. Language is not well adapted to describing geometry, as the facilities for language and geometry live on opposite sides of the human brain. This perhaps accounts for the presence in the current literature on singularities of expressions like "using the isotopy lemma, it can be shown" without the forty pages of geometric constructions and estimates needed to apply the isotopy lemma.

Nevertheless, a geometrically apt rigorization of a geometric idea can actually add to its ease of visualization. Major examples of this are the final versions of singular homology and of stratified spaces.

Podczas niniejszego wykładu opiszę, w jaki sposób metody topologii algebraicznej znajdują zastosowanie — pośrednio i bezpośrednio — w geometrii algebraicznej. Podstawowym pytaniem jest: *jak z obiektem geometrycznym zdefiniowanym w algebraiczny sposób, jakim jest rozmaitość algebraiczna, stowarzyszyć zdefiniowany w algebraiczny sposób typ homotopii?* Na to pytanie nie odpowiem, ale postaram się wytłumaczyć, dlaczego jest ono istotne.

Moim zamierzeniem było, by to wystąpienie było zrozumiałe dla możliwie szerokiego grona słuchaczy. Niniejsze notatki uzupełniają wersję mówioną o matematyczne szczegóły (definicje, prezycyjne sformułowania twierdzeń) oraz wyniki, których zrozumienie wymaga nieco więcej znajomości matematyki wyższej. Te trudniejsze fragmenty oznaczono gwiazdką ($\star$).

1. Co to jest rozmaitość algebraiczna?

Niech K będzie ciałem. Dla ustalenia uwagi, wymieńmy kilka ciał które pojawiają się najczęściej:

- $\mathbf{C}$, ciało liczb zespolonych,
- $\mathbf{R}$, liczby rzeczywiste,
- $\mathbf{Q}$, liczby wymierne,
- *ciała liczbowe* (skończone rozszerzenia $\mathbf{Q}$), np. $\mathbf{Q}(\sqrt{-1})$,
- ciała skończone: $\mathbf{F}_p = \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$, $\mathbf{F}_{p^n}$,
- $\mathbf{Q}_p$, liczby p-adyczne[2],
- $\mathbf{C}(t)$, funkcje wymierne zmiennej zespolonej,
- $\mathbf{C}((t))$, szeregi formalne Laurenta zmiennej zespolonej.
- algebraiczne domknięcia powyższych: $\overline{\mathbf{Q}}$, $\overline{\mathbf{F}}_p$, ...

Definicja 1.1. *Afiniczną rozmaitością algebraiczną* nad K nazywamy zbiór X rozwiązań $(x_1, \ldots, x_n)$ układu równań wielomianowych

$$\begin{cases} f_1(x_1, \ldots, x_n) = 0, \\ \ldots \\ f_r(x_1, \ldots, x_n) = 0, \end{cases}$$

o współczynnikach w K.

Dwie natychmiastowe uwagi do powyższej definicji. Po pierwsze, ściśle rzecz biorąc, powyżej zdefiniowaliśmy „schemat afiniczny skończonego typu nad K" (w tym tekście nie będziemy rozwodzili się nad różnicą pomiędzy rozmaitościami i schematami). Po drugie, *celowo* nie wspomnieliśmy, do jakiego zbioru mają należeć wartości zmiennych $x_1, \ldots, x_n$! W istocie, interesują nas rozwiązania $(x_1, \ldots, x_n) \in L^n$ dla każdego rozszerzenia L ciała K, a nawet $(x_1, \ldots, x_n) \in R^n$ dla każdej K-algebry[3] R. Wprowadźmy następujące oznaczenie na zbiór rozwiązań o wartościach w R:

$$X(R) = \{(x_1, \ldots, x_n) \in R^n \mid f_1(x_1, \ldots, x_r) = \ldots = f_r(x_1, \ldots, x_r)\}.$$

(Ewaluacja f_i w $(x_1, \ldots, x_n)$ ma sens ponieważ współczynniki wielomianów f_i leżą w K a R jest K-algebrą). Zauważmy też, że jeżeli $f\colon R \to R'$ jest homomorfizmem K-algebr, to

[2]($\star$) Uzupełnienie $\mathbf{Q}$ względem metryki $d(x, y) = p^{-\nu_p(x-y)}$ dla $x \neq y$, gdzie $\nu_p(z)$ jest zdefiniowane przez $z = p^{\nu_p(z)} \frac{a}{b}$, $(p, a) = 1 = (p, b)$ dla $z \neq 0$.

[3]Gdybyśmy rozważali tylko rozwiązania w K, wtedy np. dla $K = \mathbf{R}$ bylibyśmy zmuszeni uznać rozmaitość zadaną równaniem

$$x_1^2 + x_2^2 = -1$$

za zbiór pusty, podczas gdy równanie to ma rozwiązania nad $L = \mathbf{C}$! Dla ciał algebraicznie domkniętych ten problem jest mniej istotny.

rozwiązania o wartościach w R dają rozwiązania o wartościach w R', innymi słowy mamy indukowane odwzorowanie

$$f\colon X(R) \to X(R').$$

Musimy pamiętać nie tylko zbiory $X(R)$ dla wszystkich R, ale też powyższe odwzorowania[4] dla wszystkich f.

Przykład 1.2 (Przestrzenie afiniczne). Najprostsze przykłady rozmaitości afinicznych to *przestrzenie afiniczne*

$$X = \mathbf{A}^n_K, \quad X(R) = R^n.$$

(Mamy tu n zmiennych oraz 0 równań.) Z definicji, każda afiniczna rozmaitość algebraiczna jest (domkniętą) podrozmaitością przestrzeni afinicznej.

Przykład 1.3 (Okrąg jednostkowy). Przykład znany ze szkoły: okrąg jednostkowy X na płaszczyźnie ($\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$) dany jest równaniem

$$x^2 + y^2 = 1.$$

(W przypadku dwu zmiennych będziemy je nazywali x i y zamiast x_1 i x_2.)

Przykład 1.4 (Krzywe Fermata). *Krzywą Fermata* (afiniczną) nazywamy rozmaitość X_n ($n \geqslant 2$) zadaną równaniem

$$x^n + y^n = 1.$$

Jak wspomnieliśmy, w geometrii algebraicznej kluczowe jest rozpatrywanie rozwiązań nad różnymi ciałami. Zobaczmy tę różnorodność teraz w praktyce na powyższych przykładach:

- $X_2(\mathbf{R})$ to okrąg jednostkowy,
- $X_2(\mathbf{Q})$ odpowiada trójkom Pitagorejskim (np. $(3/5, 4/5)$),
- $X_n(\mathbf{Q})$ jest opisane przez Wielkie Twierdzenie Fermata,
- $X_n(\mathbf{C})$ to (nakłuta) powierzchnia Riemanna genusu $g = (n-1)(n-2)/2$,
- $X_3(\mathbf{F}_p)$ to skończona grupa abelowa mająca (być może) zastosowanie w kryptografii,
- liczby $|X_n(\mathbf{F}_{p^n})|$ dla wszystkich p^n, spakowane wygodnie w tzw. L-funkcję, hipotetycznie zawierają bardzo głębokie informacje teorioliczbowe (np. hipoteza Bircha i Swinnertona-Dyera).

Ogólne (nieafiniczne) *rozmaitości algebraiczne* (czy „schematy skończonego typu") są zbudowane z rozmaitości afinicznych, podobnie jak rozmaitości topologiczne i różniczkowe są sklejone z otwartych podzbiorów w $\mathbf{R}^n$. Najistotniejsza rodzina przykładów rozmaitości nieafinicznych to *rozmaitości rzutowe*, zadane za pomocą układów równań wielomianowych *jednorodnych* w przestrzeni rzutowej. Dla przykładu, rzutowa krzywa Fermata:

$$\overline{X}_n = \{X^n + Y^n = Z^n\} = X_n \cup \{\infty\} \subseteq \mathbf{P}^2_K.$$

2. Topologia algebraiczna i geometria algebraiczna

Opiszemy teraz jak i dlaczego metody topologii algebraicznej są przydatne w badaniu rozmaitości algebraicznych.

Zacznijmy od krótkiego zarysu działania topologii algebraicznej. Obiektowi geometrycznemu (sensownej przestrzeni topologicznej) przyporządkowuje się obiekt algebraiczny (np. grupę podstawową czy grupy kohomologii). Przestrzeniom homotopijne równoważnym przypisuje się ten sam obiekt; utożsamiając ze sobą przestrzenie homotopijnie równoważne (oraz homotopijne przekształcenia) zamieniamy przestrzenie na ich odpowiednie typy homotopii.

[4] Innymi słowy, przez X rozumiemy odpowiedni *funktor* z kategorii K-algebr do kategorii zbiorów. To ułatwia zdefiniowanie morfizmu rozmaitości — jest to po prostu transformacja naturalna funktorów.

$$\begin{tikzcd}
\text{GEOMETRIA} \arrow[rr] \arrow[dr, dotted] & & \text{ALGEBRA} \\
& \text{TEORIA HOMOTOPII} \arrow[ur, dotted] &
\end{tikzcd}$$

Przykład 2.1. Symbole **B**, **Q**, **8** posiadają ten sam typ homotopii, często opisywany jako „bukiet dwu okręgów" ($\mathbf{S}^1 \vee \mathbf{S}^1$). Ich ciekawe niezmienniki to pierwsza grupa homologii $H_1(\mathbf{S}^1 \vee \mathbf{S}^1, \mathbf{Z}) \simeq \mathbf{Z}^2$ oraz grupa podstawowa $\pi_1(\mathbf{S}^1 \vee \mathbf{S}^1) \simeq F_2$ (grupa wolna na dwu generatorach).

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{B},\ \mathbf{Q},\ \mathbf{8} \arrow[rr, rightsquigarrow] \arrow[dr, rightsquigarrow] & & H_1(X, \mathbf{Z}) \simeq \mathbf{Z}^2,\ \pi_1(X) \simeq F_2 \\
& \mathbf{S}^1 \vee \mathbf{S}^1 \arrow[ur, rightsquigarrow] &
\end{tikzcd}$$

2.2. **Bezpośrednie zastosowanie topologii algebraicznej w geometrii algebraicznej.** Aby móc zastosować maszynerię topologii algebraicznej do badania rozmaitości algebraicznej X nad K, musimy wyprodukować sensowną przestrzeń topologiczną odpowiadającą X. W geometrii algebraicznej często bada się odpowiadającą X przestrzeń topologiczną $X(\bar{K})$ wyposażoną w tzw. topologię Zariskiego[5], jednak jest ona zbyt patologiczna z punktu widzenia topologii algebraicznej[6].

Najprostsze rozwiązanie tego problemu jest możliwe, jeżeli ciało K zanurza się w $\mathbf{C}$, bo wtedy zbiór $X(\mathbf{C})$, z topologią indukowaną ze zwykłej topologii $\mathbf{C}^n$, jest sensowną przestrzenią topologiczną:

$$\iota\colon K \hookrightarrow \mathbf{C} \quad \rightsquigarrow \quad X(\mathbf{C}) \quad \rightsquigarrow \quad H_n(X(\mathbf{C}), \mathbf{Z}),\, \pi_1(X(\mathbf{C})), \ldots$$

Jest kilka problemów z powyższym podejściem:

- Zanurzenie ι może nie istnieć, np. jeśli ciało K ma dodatnią charakterystykę.
- Naturalny sposób obejścia powyższego np. dla $K = \mathbf{F}_p$ to znalezienie „podniesienia" $\tilde{X}$ rozmaitości X do charakterystyki zero i rozważenie $\tilde{X}(\mathbf{C})$. Jak pokazał Serre [Ser61], takie podniesienia nie zawsze istnieją.
- Jak również pokazał Serre [Ser64], dla ustalonego X, typ homotopii $X(\mathbf{C})$ może zależeć od wyboru[7] ι.
- W związku z powyższym, nie istnieje naturalne działanie grupy Galois $G_K = \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ na $X(\mathbf{C})$, jego typie homotopii, ani na jego grupach (ko)homologii.

2.3. **Topologia étale i kohomologie étale (Artin–Grothendieck).** W związku z powyższymi problemami, naturalne wydaje się następujące podejście. Zamiast stosować metody topologii algebraicznej bezpośrednio do pewnej przestrzeni otrzymanej z X, spróbujmy stworzyć w algebraiczny sposób narzędzia analogiczne do narzędzi topologii algebraicznej. Najbardziej skuteczną próbą tego typu było skonstruowanie przez Artina i Grothendiecka tzw. topologii étale (jest to tzw. topologia Grothendiecka, czyli uogólnienie pojęcia przestrzeni topologicznej istotne z punktu widzenia teorii snopów) oraz kohomologii étale [SGA73]. Nie będziemy tutaj opisywać ich konstrukcji, ale podamy kilka własności.

Jednym z mankamentów na wstępie tej teorii jest konieczność wyboru pomocniczej liczby pierwszej ℓ (jeżeli ciało K ma charakterystykę $p > 0$, wymagamy $\ell \neq p$). Jeżeli X

---

[5] Zbiory domknięte w topologii Zariskiego to te zadane przez równania wielomianowe.

[6] Np. prawie nigdy nie jest Hausdorffa, a wszystkie krzywe Fermata X_n są ze sobą homeomorficzne.

[7] Polecam zastanowienie się nad tym faktem przez chwilę.

jest rozmaitością algebraiczną nad K, wtedy kohomologie étale X to przestrzenie liniowe nad ciałem liczb ℓ-adycznych $\mathbf{Q}_\ell$:

$$X \quad \rightsquigarrow \quad H^n(X, \mathbf{Q}_\ell)$$

(mówiąc ściślej, rozważamy grupy $H^n_{\mathrm{et}}(X_{\bar{K}}, \mathbf{Q}_\ell)$). Są one wyposażone w naturalne ciągłe działanie grupy Galois $G_K = \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$.

Aby przekonać się, że grupy kohomologii étale są sensownym pomysłem, należy je porównać z grupami kohomologii $X(\mathbf{C})$ w przypadku $K = \mathbf{C}$. Istotnie, Artin udowodnił, że istnieje naturalny izomorfizm

$$H^n(X, \mathbf{Q}_\ell) \simeq H^n(X(\mathbf{C}), \mathbf{Q}_\ell), \tag{1}$$

gdzie po lewej stronie mamy algebraicznie zdefiniowane grupy kohomologii étale, a po prawej — grupy kohomologii (singularnych) przestrzeni topologicznej $X(\mathbf{C})$ zdefiniowane klasycznie przez topologów algebraicznych kilkadziesiąt lat wcześniej.

Jakie są zastosowania grup kohomologii étale? Chyba najważniejszym elementem ich struktury jest działanie grupy Galois, które ma tendencję do „pamiętania" informacji o punktach wymiernych $X(K)$ oraz podrozmaitościach algebraicznych (jest to sformułowane precyzyjnie w hipotezach Weila — o których opowiemy za chwilę — oraz Tate'a).

Zakończę ten temat następującą ogólną uwagą. Metody topologii algebraicznej stają się *jeszcze potężniejsze* w badaniu rozmaitości algebraicznych (w odróżnieniu od przestrzeni topologicznych), ponieważ odpowiednie niezmienniki (np. grupy kohomologii) są wyposażone w dużo więcej struktury (np. wspomniane wyżej działanie grupy Galois. Jest to prawda nawet dla $K = \mathbf{C}$, gdzie grupy kohomologii są wyposażone w tzw. *struktury Hodge'a*. Zgodnie z jednym z Problemów Milenijnych — hipotezą Hodge'a — struktury te pamiętają, które klasy w kohomologiach pochodzą od podrozmaitości algebraicznych (ściślej — „wymiernych cykli algebraicznych").

2.4. **Hipotezy Weila (Dwork, Grothendieck, Deligne).** Jedną z głównych motywacji dla skonstruowania kohomologii étale przez Artina i Grothendiecka były hipotezy postawione kilkanaście lat wcześniej przez Weila. Dotyczą one liczenia punktów na rozmaitościach algebraicznych nad ciałami skończonymi.

Niech zatem $K = \mathbf{F}_q$ (gdzie $q = p^e$ dla pewnej liczby pierwszej p oraz $e \geqslant 1$) będzie ciałem skończonym i niech X będzie rozmaitością algebraiczną[8]. Zastanawiamy się, ile punktów leży na X nad ciałem K i jego rozszerzeniami $L = \mathbf{F}_{q^m}$:

$$N_m := |X(\mathbf{F}_{q^m})| = \quad ?$$

O dziwo, to pytanie ma silny związek z kohomologiami! Liczby N_m jest wygodnie upakować w funkcję tworzącą, tzw. *funkcję dzeta Hassego–Weila*, następującej postaci

$$Z(X,t) = \exp\left(\sum_{m \geqslant 1} \frac{|X(\mathbf{F}_{q^m})|}{m} t^m\right).$$

Przykład 2.5. Dla płaszczyzny rzutowej $X = \mathbf{P}^2_K$ (którą można rozłożyć na $\mathbf{A}^0_K \cup \mathbf{A}^1_K \cup \mathbf{A}^2_K$), liczba punktów nad ciałem $\mathbf{F}_{q^m}$ wynosi

$$N_m = 1 + q + q^2.$$

Zatem

$$Z(X,t) = \frac{1}{(1-t)(1-qt)(1-q^2t)}.$$

[8]($\star$) Dokładniej: rozmaitością algebraiczną gładką i rzutową.

Zauważmy jednocześnie, że wymiary grup kohomologii $H^{2i}(\mathbf{C}P^2, \mathbf{Q})$ wynoszą kolejno $1, 1, 1$ (nieparzyste grupy kohomologii znikają). Zgodnie z hipotezami Weila, liczby N_m kodują wymiary grup kohomologii[9].

Przykład 2.6. Niech $X = \overline{X}_n$ będzie (rzutową) krzywą Fermata (zakładamy tutaj, że p nie dzieli n, w przeciwnym przypadku ta krzywa nie jest gładka). Wtedy

$$Z(X,t) = \frac{P(t)}{(1-t)(1-qt)},$$

gdzie $P(t)$ jest wielomianem unormowanym o współczynnikach całkowitych stopnia $2g = \dim H^1(X(\mathbf{C}), \mathbf{Q})$, którego wszystkie pierwiastki zespolone t spełniają

$$|t| = \sqrt{q}.$$

Związek liczb N_m a więc i funkcji dzeta z kohomologiami jest zawarty we *wzorze śladu Lefschetza–Grothendiecka*:

$$N_m = \sum_{i \geqslant 0} (-1)^i \operatorname{Tr}(F^m \mid H^m(X, \mathbf{Q}_\ell)).$$

Tutaj F jest odwzorowaniem Frobeniusa ($F(a) = a^{1/q}$), które jest generatorem grupy Galois ciała K. Zauważmy, że grupa Galois $G_{\mathbf{F}_q} = \langle F \rangle$ działa na $X(\overline{\mathbf{F}}_q)$ i punkty stałe to dokładnie $X(\mathbf{F}_q)$, podobnie punkty stałe działania podgrupy $G_{\mathbf{F}_{q^m}} = \langle F^m \rangle$ to $X(\mathbf{F}_{q^m})$.

Możemy teraz sformułować hipotezy Weila, które uogólniają powyższe przykłady.

Twierdzenie 2.7 (Dwork, Grothendieck, Deligne)**.** *Dla dowolnej rozmaitości algebraicznej gładkiej i rzutowej X nad ciałem skończonym $K = \mathbf{F}_q$, funkcja dzeta $Z(X,t)$ ma postać*

$$Z(X,t) = \prod_{i=0}^{2 \dim X} P_i(t)^{(-1)^{i+1}}$$

gdzie P_i są wielomianami unormowanymi o współczynnikach całkowitych stopnia $\deg P_i = \dim H^i(X, \mathbf{Q}_\ell)$. *Ich pierwiastki zespolone*

$$\alpha_{ij} \quad (i = 0, \ldots, \dim X, \quad j = 1, \ldots, \dim \dim H^i(X, \mathbf{Q}_\ell)$$

spełniają

$$|\alpha_{ij}| = q^{i/2}. \quad \text{(„hipoteza Riemanna”, Deligne [Del74])}$$

W szczególności, liczby N_m można wyznaczyć za pomocą pierwiastków α_{ij}:

$$N_m = \sum_{i=0}^{\dim X} (-1)^i \sum_{j=1}^{\deg P_i} \alpha_{ij}^m.$$

A posteriori, znając wszystkie N_m, znamy liczby α_{ij} (znane ćwiczenie), a zatem znamy wymiary grup kohomologii. W szczególności, licząc punkty nad ciałami skończonymi jesteśmy w stanie powiedzieć coś o topologii rozmaitości zespolonych, co jest dość zaskakujące! Na odwrót, znajomość topologii daje nam oszacowanie na liczbę składników w powyższej sumie, a zatem na N_m.

[9] $(\star)$ Zaawansowanym czytelnikom polecam sprawdzenie tej zależności np. dla Grassmannianu.

3. Typ homotopii étale (Artin–Mazur, Friedlander)

Po zdefiniowaniu i zbadaniu kohomologii étale (oraz związanej z nimi *grupy podstawowej étale* $\pi_1^{\mathrm{et}}(X)$) powstało następujące pytanie: czy istnieje, dla danej rozmaitości algebraicznej X, naturalna „przestrzeń” (czy: typ homotopii w klasycznym znaczeniu tego słowa), której grupy kohomologii są izomorficzne z grupami kohomologii étale, i której grupa podstawowa zgadza się z grupą podstawową étale?

Na to pytanie wkrótce odpowiedzieli Artin i Mazur [AM69], którzy skonstruowali *typ homotopii étale* $\Pi_\infty^{\mathrm{et}}(X)$:

$$X \quad \rightsquigarrow \quad \Pi_\infty^{\mathrm{et}}(X) \quad \rightsquigarrow \quad H^n(X, \mathbf{Q}_\ell),\, \pi_1^{\mathrm{et}}(X), \ldots$$

(Formalnie, jest to pro-obiekt (pewna granica odwrotna) w kategorii typów homotopii.)

Aby przybliżyć czytelnikowi nieco ideę konstrukcji typu homotopii étale, rozważmy wpierw, w jaki sposób możemy zrozumieć typ homotopii rozmaitości topologicznej M. Z definicji, M można pokryć ściągalnymi podzbiorami otwartymi:

$$M = \bigcup_{i\in I} U_i, \quad U_i \overset{\text{homeo}}{\simeq} \mathbf{R}^n.$$

Ich przecięcia $U_i \cap U_j$ niekoniecznie są ściągalne, ale można je z kolei pokryć ściągalnymi podzbiorami otwartymi:

$$U_i \cap U_j = \bigcup_{k\in I_{i,j}} U_{ijk}, \quad U_{ijk} \overset{\text{homeo}}{\simeq} \mathbf{R}^n.$$

Jeżeli będziemy odpowiednio skrupulatni jeśli chodzi o notację, zbiory indeksów

$$I_0 = I, \quad I_1 = \coprod_{i,j\in I} I_{i,j}, \quad \ldots$$

wraz z naturalnymi odwzorowaniami pomiędzy nimi (np. istnieją dwa naturalne odwzorowania $I_1 \to I_0$, posyłające element $k \in I_{i,j}$ na i lub na j), będą stanowiły obiekt kombinatoryczny zwany *zbiorem symplicjalnym*[10]:

$$I_\bullet \quad : \quad I_0 \leftleftarrows\!\!\!\!\rightarrow I_1 \;\substack{\longleftarrow\\ \longrightarrow\\ \longleftarrow\\ \longrightarrow\\ \longleftarrow}\; I_2 \;\; \cdots$$

Zbiór symplicjalny $I_\bullet$ pamięta typ homotopii rozmaitości M.

Przykład 3.1. Okrąg jednostkowy $\mathbf{S}^1 \subseteq \mathbf{C}$ można pokryć dwoma ściągalnymi zbiorami otwartymi

$$\mathbf{S}^1 = U_+ \cup U_-, \quad U_+ = \{\mathrm{Re}\, z > -1/2\}, \quad U_- = \{\mathrm{Re}\, z < 1/2\}.$$

Ich przecięcie $U_+ \cap U_-$ składa się z dwu ściągalnych składowych. Otrzymany zbiór symplicjalny ma po dwa niezdegenerowane sympleksy wymiaru 0 i 1.

($\star$) W kontekście rozmaitości algebraicznych, powyższe podejście napotyka na problem: nie są one „lokalnie ściągalne” w żaden naturalny sposób. Aby to przeskoczyć, Artin i Mazur rozpatrują wszystkie możliwe „hipernakrycia” (tj. systemy pokryć X „zbiorami otwartymi étale”, wraz z pokryciami przecięć par tych zbiorów, i tak dalej, bez założenia ściągalności). Jeżeli

$$U_\bullet \quad : \quad U_0 \leftleftarrows\!\!\!\!\rightarrow U_1 \;\substack{\longleftarrow\\ \longrightarrow\\ \longleftarrow\\ \longrightarrow\\ \longleftarrow}\; U_2 \;\; \cdots$$

jest takim hipernakryciem, zamieniamy każdą rozmaitość U_n zbiorem jej spójnych składowych $I_n = \pi_0(U_n)$, otrzymując zbiór symplicjalny $I_\bullet$, który oczywiście zależy od wyboru $U_\bullet$, nawet z dokładnością do homotopii. Idea polega na rozpatrywaniu wszystkich takich zbiorów symplicjalnych $I_\bullet$, indeksowanych zbiorem wszystkich hipernakryć $U_\bullet$ rozmaitości

[10] ($\star$) Formalnie, zbiór symplicjalny to funktor kontrawariantny z kategorii niepustych skończonych porządków liniowych do kategorii zbiorów.

X. To daje szukany pro-obiekt $\Pi_\infty^{\text{et}}(X)$ w kategorii homotopii (Artin–Mazur), który przy małej modyfikacji pochodzi od pro-obiektu w kategorii zbiorów symplicjalnych (Friedlander [Fri82]).

($\star$) W przypadku $K = \mathbf{C}$, mamy naturalny morfizm typów homotopii

$$X(\mathbf{C}) \to \Pi_\infty^{\text{et}}(X),$$

który indukuje izomorfizm na „uzupełnieniach proskończonych" obu przestrzeni, uogólniając twierdzenie porównawcze dla kohomologii (1).

4. Charakterystyka 0 i charakterystyka p

Jak widzieliśmy, geometria algebraiczna nad ciałami charakterystyki zero ma tę zaletę, że (zazwyczaj) można założyć, że dane ciało to ciało $\mathbf{C}$ liczb zespolonych, co pozwala nam na korzystanie bezpośrednio z metod topologii algebraicznej, analizy, geometrii symplektycznej itd. Podobnie, geometria algebraiczna nad ciałami charakterystyki dodatniej pozwala na korzystanie z właściwych sobie metod: morfizmu Frobeniusa $x \mapsto x^p$ oraz liczenia punktów nad ciałami skończonymi.

Wiele głębokich wyników w geometrii algebraicznej nie posiada znanych dowodów nie uciekających się do jednej z wymienionych metod, i jest pożądane, żeby w danym kontekście można było użyć kilku z nich. Służą do tego dwie metody „zmiany charakterystyki": *redukcja modulo p* oraz *podnoszenie do charakterystyki zero.*

Jakkolwiek redukcję modulo p zawsze można wykonać z powodzeniem, jeżeli tylko p wziąć odpowiednio duże, tak (jak już wspomnieliśmy) podnoszenie do charakterystyki zero nie zawsze jest możliwe. Jest to związane z pewnymi patologiami natury topologicznej na rozmaitościach algebraicznych w dodatniej charakterystyce.

Typy homotopii rozmaitości nad ciałami charakterystyki dodatniej często mają bardzo dziwne własności. Dla przykładu:

- Prosta afiniczna $\mathbf{A}^1_K$ (K algebraicznie domknięte charakterystyki p) nie jest jednospójna (ma nietrywialne nakrycia).

  Najprostszym przykładem jest *nakrycie Artina–Schreiera*:

  $$f(t) = t - t^p \quad : \mathbf{A}^1_K \to \mathbf{A}^1_K.$$

  Aby sprawdzić, że to jest nakrycie, liczymy pochodną:

  $$f'(t) = 1 - pt^{p-1} = 1.$$

  Zatem prosta afiniczna nakrywa sama siebie p-krotnie! ($\star$) Zjawisko jest to związane z tzw. dzikim rozgałęzieniem (ramifikacją) morfizmu f w nieskończoności.
- Jak pokazał Raynaud [Ray94], grupa podstawowa $\pi_1(\mathbf{A}^1_K)$ jest bardzo duża: każda grupa skończona G która nie posiada nietrywialnych ilorazów stopnia względnie pierwszego z p (na przykład, prawie wszystkie nieabelowe grupy proste) jest ilorazem $\pi_1(\mathbf{A}^1_K)$!
- Jak pokazali Holschbach–Schmidt–Stix [HSS14], nie istnieją „ściągalne" rozmaitości nad ciałem charakterystyki dodatniej inne niż punkt.

Następujące ogólne twierdzenie jest nieco zaskakujące — mówi ono, że grupa podstawowa jest w pewnym sensie „odpowiedzialna" za wszystkie te komplikacje.

Twierdzenie 4.1 (A. 2017 [Ach17])**.** *Typ homotopii étale dowolnej rozmaitości algebraiczna nad ciałem charakterystyki dodatniej jest przestrzenią $K(\pi, 1)$.*

Z definicji, przestrzeń $K(\pi, 1)$ to taka przestrzeń Y, której wszystkie wyższe grupy homotopii $\pi_n(Y)$ ($n \geqslant 2$) są zerowe. Typ homotopii takiej przestrzeni jest jednoznacznie wyznaczony przez jej grupę podstawową $\pi_1(Y)$.

Przykładowym wnioskiem z tego twierdzenia jest fakt, że grupy podstawowe étale $\pi_1(\mathbf{A}^n_K)$ oraz $\pi_1(\mathbf{A}^m_K)$ nie są izomorficzne dla $n \neq m$.

($\star$) Problem otwarty (motywowany powyższymi rozważaniami oraz tzw. „anabelian geometry”). Niech K będzie ciałem doskonałym charakterystyki p (tj. dowolny jego element jest p-tą potęgą). Czy grupa $\pi_1(\mathbf{A}^1_K)$ wyznacza ciało K z dokładnością do izomorfizmu?

5. ($\star$) Inne typy homotopii

Na koniec wrócę do charakterystyki zero i wspomnę pokrótce o innym problemie konstruowania typu homotopii w geometrii algebraicznej. Tym razem naszym ciałem bazowym będzie ciało szeregów formalnych Laurenta:

$$K = \mathbf{C}(\!(t)\!) = \left\{ \sum_{n \gg -\infty} a_n t^n \ : \ a_n \in \mathbf{C} \right\}.$$

Problem, postawiony przez Davida Treumanna (i motywowany związkami symetrii lustrzanej z zespoloną K-teorią), jest następujący: czy dla rozmaitości X nad tym ciałem można zdefiniować naturalny typ homotopii $\Psi(X)$, podobny do $X(\mathbf{C})$, który pamiętałby też działanie monodromii?

Dla przykładu, dla krzywej eliptycznej E zadanej równaniem

$$E\colon t(x^3 + y^3 + z^3) = 3xyz$$

typem homotopii powinien być dwuwymiarowy torus

$$\Psi(E) \simeq \mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1,$$

na którym operator monodromii działa jako „trzykrotne skręcenie Dehna”.

Rozwiązanie (w pracy wspólnej z M. Talpo) konstruuje i bada taki typ homotopii za pomocą tzw. geometrii logarytmicznej.

Literatura

[Ach17] Piotr Achinger, *Wild ramification and $K(\pi, 1)$ spaces*, Invent. Math. **210** (2017), no. 2, 453–499. MR 3714509

[AM69] M. Artin and B. Mazur, *Etale homotopy*, Lecture Notes in Mathematics, No. 100, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1969. MR 0245577 (39 #6883)

[Del74] Pierre Deligne, *La conjecture de Weil. I*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. (1974), no. 43, 273–307. MR 0340258

[Fri82] Eric M. Friedlander, *Étale homotopy of simplicial schemes*, Annals of Mathematics Studies, vol. 104, Princeton University Press, Princeton, N.J.; University of Tokyo Press, Tokyo, 1982. MR 676809

[HSS14] Armin Holschbach, Johannes Schmidt, and Jakob Stix, *Étale contractible varieties in positive characteristic*, Algebra Number Theory **8** (2014), no. 4, 1037–1044. MR 3248993

[Ray94] M. Raynaud, *Revêtements de la droite affine en caractéristique $p > 0$ et conjecture d'Abhyankar*, Invent. Math. **116** (1994), no. 1-3, 425–462. MR 1253200

[Ser61] Jean-Pierre Serre, *Exemples de variétés projectives en caractéristique p non relevables en caractéristique zéro*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **47** (1961), 108–109. MR 0132067

[Ser64] ———, *Exemples de variétés projectives conjuguées non homéomorphes*, C. R. Acad. Sci. Paris **258** (1964), 4194–4196. MR 0166197

[SGA73] *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas. Tome 3*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 305, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1973, Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie 1963–1964 (SGA 4), Dirigé par M. Artin, A. Grothendieck et J. L. Verdier. Avec la collaboration de P. Deligne et B. Saint-Donat. MR 0354654 (50 #7132)

Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk
ul. Śniadeckich 8, 00-656 Warszawa
E-mail address: `pachinger@impan.pl`